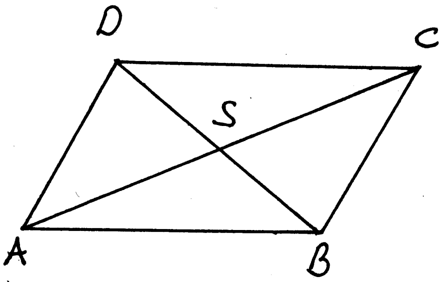
# Paralelogram

Paralelogram je četverougao koji ima dva para paralelnih stranica. Potreban i dovoljan uslov da četverougao $\square ABCD$ bude paralelogram je:




$P = a \cdot h = ab \sin\alpha$

a) $p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,D) \parallel p(B,C)$

b) $p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $AB \cong CD$

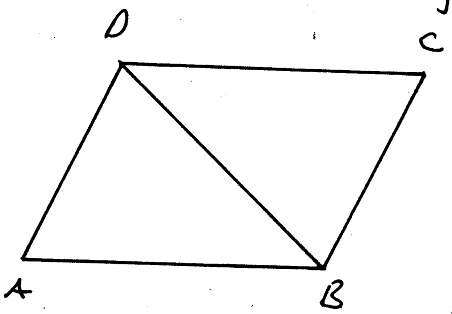
c) dijagonale se polove
($AC \cap BD = \{S\}$, $AS \cong SC$, $BS \cong DS$)

d) $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$

Dijagonala u paralelogramu nije simetrala ugla.

1. Diskutovati da li je paralelogram tangentni ili tetivni četverougao.

Rj.




Dat je paralelogram $\square ABCD$

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong CD \\ AD \cong CB \\ BD \cong BD \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle ABD \cong \triangle BCD$$

$$\Downarrow$$

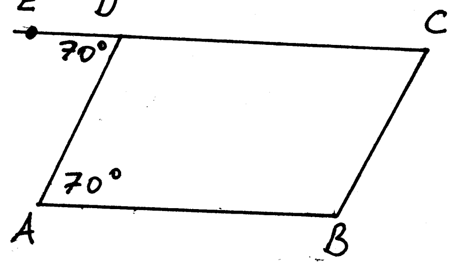
$$\measuredangle BAD \cong \measuredangle DCB$$

Da bi paralelogram bio tetivni potrebno je i dovoljno da je $\measuredangle BAD + \measuredangle DCB = 180°$ tj. $\measuredangle BAD \cong \measuredangle DCB = 90°$.

Paralelogram će biti tetivni akko je $AB \cong AD$.

2. U paralelogramu $\square ABCD$ ugao pod A jednak je $70°$. Izračunati: a) ugao pod $\measuredangle ADC$ b) ugao pod $\measuredangle BCD$ c) ugao $\measuredangle CAB$

Rješ.




$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,D)$ transferzala

a) $\Rightarrow \measuredangle ADE = 70°$ $(C-D-E)$

$\Rightarrow \measuredangle ADC = 110°$

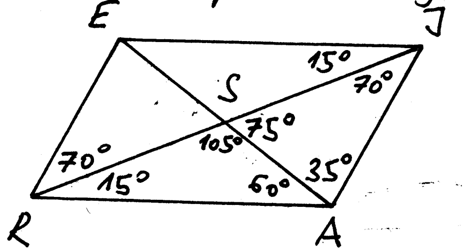
b) $\measuredangle BCD = \measuredangle DAB = 70°$

c) $\measuredangle CAB$ se ne može izračunati

3. Dat je $\square ABCD$. Dokazati da $p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $AB \cong CD$ ako i samo ako se dijagonale polove.

4. U četvorouglu $\square RAJE$ dijagonale se polove u tački $S$. Ako je $\sphericalangle EAJ = 35°$, $\sphericalangle ASJ = 75°$ i $\sphericalangle RJE = 15°$ odrediti ostale uglove četvorougla.

Rj: Kako se u $\square RAJE$ dijagonale polove to je dati četvorougao paralelogram.




$p(A,R) \parallel p(E,J)$ i $p(R,J)$ transferzala

$\Rightarrow \sphericalangle JRA = 15°$

$35° + 75° + \sphericalangle RJA = 180° \Rightarrow \sphericalangle RJA = 70°$.

$\sphericalangle EJA \cong \sphericalangle ERA \Rightarrow \sphericalangle JRE = 70°$

$\sphericalangle RSA + \sphericalangle JSA = 180°$ tj. $\sphericalangle RSA = 105°$

U $\triangle RSA$ su poznata dva ugla $\Rightarrow \sphericalangle RAS = 60°$.

Prema tome: $\sphericalangle R = 85°$, $\sphericalangle A = 95°$, $\sphericalangle J = 85°$ i $\sphericalangle E = 95°$

5. Za četvorougao $\square ABCD$ važi $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$. Visina spuštena iz vrha $D$ je 4 cm, a $\sphericalangle BAD = 53°$. Odrediti ostale uglove četvorougla.

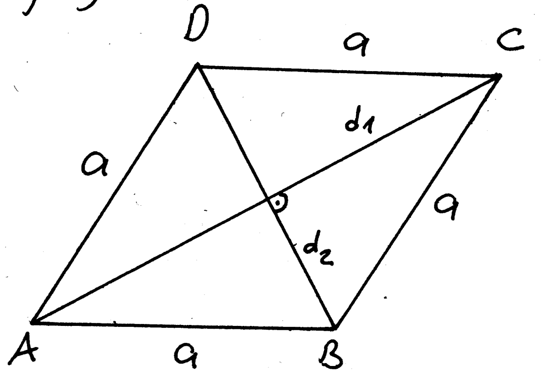
## Romb

Romb je paralelogram kod koga su sve stranice podudarne. Potreban i dovoljan uslov da četvorougao $\square ABCD$ bude romb je

a) da ima dva para paralelnih i podudarnih stranica

b) da ima sve četiri podudarne stranice

c) dijagonale se polove pod pravim uglom.




$$P = a \cdot h = a\,a \sin\alpha = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

1. Diskutovati da li je romb tangentni ili tetivni četvorougao.

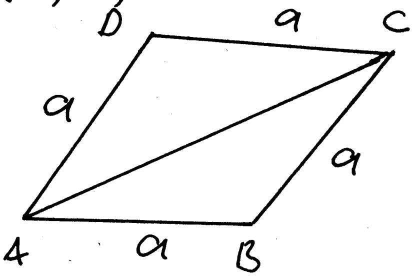
Rj: Romb jest tetivni četvorougao $(AB + CD = BC + AD)$

Romb je tangentni četverougao akko $\measuredangle A + \measuredangle C = 180°$

tj. $\measuredangle A = \measuredangle C = 90°$

(2.) Neka je četverougao $\square ABCD$ romb. Dokazati da je $p(A,C)$ simetrala ugla kod $A$.

Rj.




$$\left.\begin{array}{l} AD \cong BC \\ CD \cong AB \\ AC \cong AC \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC$$

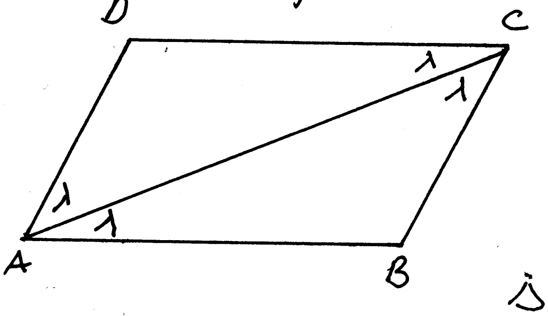
$$\Downarrow$$

$$\measuredangle DAC \cong \measuredangle CAB$$

tj $p(A,C)$ simetrala ugla kod $A$.

(3.) Ako je u paralelogramu $\square ABCD$ dijagonala $AC$ simetrala ugla kod $A$ tada je taj četverougao romb.

Rj.




Kako je $p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $\measuredangle BAC = \measuredangle CAD = \lambda$ to je $\measuredangle ACD = \lambda$.

$p(A,D) \parallel p(B,C)$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle ACB = \lambda$

$\triangle ABC$ je jkk sa osnovicom $AC \Rightarrow AB \cong BC$ tj. $\square ABCD$ jest romb

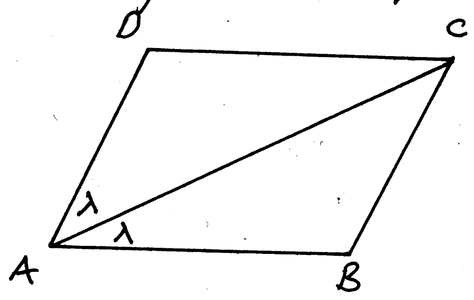
(4.) Četverougao $\square ABCD$ ima sve četri podudarne stranice ako i samo ako se dijagonale polove pod pravim uglom. Dokazati.

(5.) U paralelogramu $\square ABCD$ su uglovi $\measuredangle CAB$ i $\measuredangle DAC$ podudarni.

a) ako je $AB = 2$ da li možemo izračunati stranicu $BC$

b) da li je ovom paralelogramu moguće upisati kružnicu.

Rj.




$\square ABCD$ paralelogram i $\measuredangle BAC \cong \measuredangle CAD = \lambda$

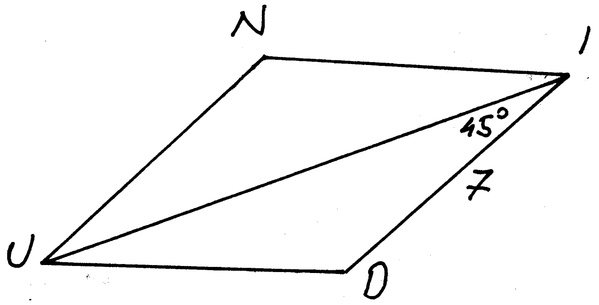
$\Rightarrow \square ABCD$ je romb

a) $BC = 2$

b) romb je tangenti četverougao

$\Rightarrow$ može se upisati kružnica.

(6.) Četverougao $\square UDIN$ je romb, $\measuredangle DIU = 45°$ i $DI = 7$. Može li se izračunati obim četverougla. Ako može izračunati ga.




$\square UDIN$ romb $\Rightarrow$

$UD = DI = IN = NU = 7$

$O_{romba} = 28$

⑦ Četverougao $\square VAFI$ ima dva para jednakih i paralelnih stranica. Ako su veličine dijagonala 12 i 10 može li se izračunati obim četverougla. Ako može, izračunati ga.

## Računanje površine trougla

Formule za površinu trougla

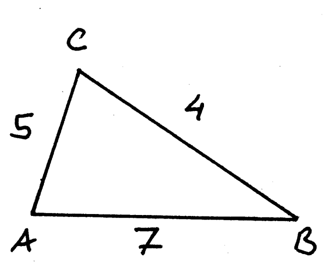
1. $P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$
2. $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$
3. $P = r \cdot s$, $r$ poluprečnik upisane kružnice
4. $P = \frac{abc}{4R}$, $R$ poluprečnik opisane kružnice
5. $P = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} ac \sin\beta = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$

① Dat je $\triangle ABC$. Ako su mu stranice redom dužine 4, 5 i 7 cm odrediti:

a) poluprečnik upisane kružnice

b) poluprečnik opisane kružnice

Rj:




$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+7}{2} = 8$

$P = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1} = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3} = 4\sqrt{6}$

$P = r \cdot s$

$4\sqrt{6} = r \cdot 8$

$r = \frac{4\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ polupr. upi. kružnice

$P = \frac{abc}{4R}$

$4\sqrt{6} = \frac{20 \cdot 7}{4 \cdot R} = \frac{5 \cdot 7}{R}$

$R 4\sqrt{6} = 35$

$R = \frac{35}{4\sqrt{6}}$ poluprečnik opisane kružnice

2. U trouglu su stranice a, b, c jednake
a) 2, 3 i 5
b) 3, 4 i 5   Izračunati poluprečnike upisane kružnice

Rj a) trougao ne postoji $(2+3=5)$

b) $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{12}{2}=6$

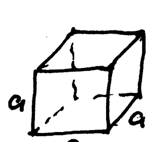
$P=\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}=\sqrt{36}=6$

$P=r\cdot s \Rightarrow 6=6\cdot r \Rightarrow r=1$ poluprečnik upisane kružnice

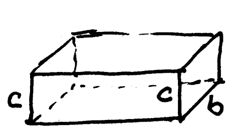
3. Nacrtati $\Delta ABC$ tako da se centar opisane kružnice $k(S,R)$ nalazi u vanjskoj oblasti trougla. Ako su $a=7$, $b=9$, $c=11$, $R=10$, $\measuredangle ABC=26°$ i $\measuredangle ACB=88°$ naći površinu i $\measuredangle BAC$ trougla.

## Površina i zapremina prizme

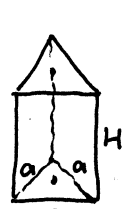
Površina proizvoljne prizme se računa po formuli:
$P=2B+M$ gdje je M - omotač, u stvari zbir površina bočnih strana, a B površina osnove.
Za pojedine vrste prizmi važe sledeće formule (a i b su osnovne ivice, H je visina, a kod kvadra često označena sa c):



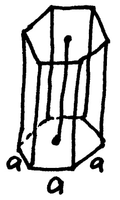
površina kocke $P=6a^2$



površina kvadra $P=2(ab+ac+bc)$



površina pravilne trostrane prizme $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+3aH$



površina pravilne šestostrane prizme $P=3a^2\sqrt{3}+6aH$

(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)